БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНСТИТУТ ЗА КОСМИЧЕСКИ
ИЗСЛЕДВАНИЯ И ТЕХНОЛОГИИ

Костадин Георгиев Шейретски

ДИНАМИКА НА ЕКВАТОРИАЛЕН СПЪТНИК НА ПЛАНЕТА

АВТОРЕФЕРАТ
на дисертация за присъждане на
образователна и научна степен „Доктор“
Област на висше образование: *4. Природни науки, математика и информатика*; Професионално направление: *4.1. Физически науки*; Научна специалност: *01.04.08. Физика на океана, атмосферата и околоземното пространство*

Научен ръководител: проф. д.т.н. Владимир Николов Дамгов

Консултант: доц. д-р Ангел Иванов Живков, СУ „Св. Климент Охридски”

Рецензенти: 1. проф. дмн Николай Колев Витанов, ИМ - БАН

2. доц. д-р Лъчезар Георгиев Филипов, ИКИТ -БАН

София
2012

Дисертационният труд е 144 страници, приложени са 7 фигури и 1 таблица. Състои се от увод, 4 глави и авторски приноси, заключение. Библиографията обхваща 111 литературни източника.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от разширен научен семинар на Институт за космически изследвания и технологии - БАН , на 14. 06. 2012 г.

Докторантът е зачислен на задочна докторантура към Институт за космически изследвания и технологии – БАН.

Изследванията по дисертационната работа са извършени в Институт за космически изследвания и технологии – БАН.

Обем и структура на дисертацията

Дисертационният труд е 144 страници, приложени са 7 фигури и 1 таблица. Състои се от увод, в който е направен литературен обзор по тематиката в дисертацията и са отбелязани приносите на работата. Глава 1 дава необходими сведения от теория на Хамилтоновите системи. Глави 2, 3 и 4 съдържат изследвания по основните задачи на дисертацията. В заключението са обобщени основните изводи и резултати от дисертационния труд. Библиографията обхваща 111 литературни източника.

Обект и предмет на дисертацията

При изучаването на движенията на планетите и техните спътници се използват знания от разнородни области на математиката – небесна механика, теория на специалните функции, асимптотични методи, теория на устойчивостите на явленията, теория на бифуркациите, теория на детерминирания хаос и други. В дисертацията са представени и използвани методи и математически модели обхващащи целия този спектър от разнородни области.

Голяма част от естествените спътници на планетите имат малка наклоненост на орбитата (инклинация). Това е една от причините спътниците, движещи се в екваториалната равнина на планета да привличат научния интерес. Освен разпространението им в Слънчевата система, предимство за изучаването им се явява подходящата за аналитичен и числен анализ форма на диференциалните уравнения, които описват движението.

Уравненията, които се получават при разгледана задачата за две тела в най-обща форма, включваща както орбиталното движение на телата, така и движението около собствения им център на масата, са интегруеми само в частни случаи, но прилагането на асимптотични методи позволява да се получат решения с достатъчна за практиката степен на точност. Изучаването на такъв тип задачи има и практически характер свързан с намиратено на методи за стабилизиране на движенията на изкуствените спътници, както и избягването на критични за движението стойности на параметрите.

Известно е, че дълговременната еволюция на движенията на небесните тела води до целочислени отношения на някои периодично изменящи се величини. Това явление е в основата на въпроса за устойчивостта на Слънчевата система. Все още липсва пълна яснота за причините водещи до такава резонансна структура, но съществуват космогонични хипотези опитващи се да обяснят тези явления с действието на дисипативни сили породени от приливното взаимодействие.

Отделено е внимание на хаотизацията на системата в случаите на движение в околност на сепаратрисите на резонанса и хаотизация в резултат на препокриване на сепаратрисите на два съседни резонанса.

Актуалност на темата

В обзорът на литературата, показващ актуалността на проблема са разгледани основните аспекти при изследването на движението на небесните тела по орбитата и около центъра на масаите им. В днешно време са разработени многочислени методи за описание на динамиката на небесните тела (Дубошин 1952; Поанкаре 1965 и 1892), позволяващи да се отчетат всички особености на конкретната задача. В работите на Белецки (1965 и 1975) е построена теорията за движение на динамически симетричен спътник като са използвани оскулиращи елементи. Уравнението на движението около центъра на масата екваториален спътник на планета е изведено от Белецки (1965). Това уравнение се изучава преимуществено от практическа гледна точка. Изследванията на уравнението на Белецки показват, че то има голям набор от периодични решения със сложна структура (Саричев, Сазонов и Златоустов 1979).

Белецки и Понамарьова (1990) правят параметричен анализ на относителното равновесие на движението на спътник в гравитационното поле на сферична планета.

Основна роля за резонансната структура на Слънчевата система играе действието на приливната сила. Влиянието и върху движението на спътниците е изследвано в монографиите (Белецки и Хентов 1995; Мъри и Дермът 2009).

В контекста на дискутирането стабилността на спин-орбиталните резонанси в консервативни системи е и моделът предложен от (Целети и Черчия 2000).

В Слънчевата система са известни много примери на резонансно и хаотично поведение. Уиздъм, Пил и Миняр (1984) предлага необичаен сценарий за двивението на спътника на Сатурн – Хиперион. Те правят числени и аналитични изследвания на уравнението на Белецки, от които става ясно, че Хиперион не само не е захванат в синхронен резонанс, но и въртенето му изпитва хаотични (в същото време детерминирани) вариации. Напълно вероятно е и други спътници с неправилна форма да изпитват хаотично въртене в продължителни периоди от своята динамична еволюция (Уиздъм 1987а; 1987б).

Цели и задачи на дисертацията

Целта на дисертационния труд е изучване на орбиталното движение на екваториален спътник на планета, едновременно с движението на спътника около центъра на масата му.

Поставяме си следните **задачи**:

1. Чрез класическите методи на Хамилтоновата механика, да се изведат основните уравнения за движението на екваториален спътник на планета, като след това се изследват аналитично;
2. Да се изследва резонансното и хаотичното движение на спътника;
3. Да се изследват частни случаи на неограничената задача за движението на спътника.

Изложение по съдържанието на дисертацията

В **Увода** е определен обекта и предмета на дисертацията, актуалността на темата с обзор на тематиката, посочени са целите и задачите на дисертацията, кратко е направено изложение по дисертацията, посочена е апробацията на резултатите, изведени са приносите и публикациите на автора по изследваните проблеми.

В **Глава 1**. са дадени необходимите сведения за Хамилтоновата механика и прилагането на метода на оскулиращите елементи.

В **Глава 2.** е разгледано движението на материална точка в екваториалната равнина на сплесната при полюсите планета. Изведен е израз за енергията на спътника в адиабатични променливи на Делоне и са намирени стойността на прецесията на спътниковата орбита.

Нека спътник с маса m, се движи в екваториалната равнина на сплесната при полюсите планета с маса M. Потенциалът на полето, в което се движи спътника има вида $U = -\frac{k}{R} - \frac{\alpha}{R^3}$, където R е разстояние от центъра на масата наспътника до центъра на планетата, $k = \gamma m(m+M)$ γе универсална гравитационна константа, $\alpha = \varepsilon \frac{MR_e{}^2 \mu}{3}$, R_e е екваториалният радиус на планетата, $\varepsilon = \frac{R_e - R_p}{R_e} - \frac{\omega_p{}^2 R_e}{g_e}$, R_p - полярен радиус на планетата, ω_p - ъглова скорост на въртене на планетата, g_e - планетно ускорение на екватора, Тогава е в сила теоремата:

Теорема 2.1. Интегралът на енергията при движението на спътник в екваториалната равнина на планета в променливи на Делоне се дава с израза:

$$E = -\frac{mk^2}{2L^2} - \frac{2\pi m^2 k\alpha}{G^3}. \qquad (2.1.24)$$

Нека P е фокалния параметър на орбитата на спътника. Прецесията се дава с формулата

$$\Delta\omega. = \frac{6\pi\alpha}{kP^2}. \qquad (2.1.25)$$

Резултатите са представени в работата (Шейретски, Лазарова, Шкевов и Ерохин 2011; Шейретски 2005).

Изследват се уравненията на движение на спътника около центъра на масите.

Определяме положението на центъра на масата на спътника O' посредством полярни координати R, φ, с център на к.с. O съвпадащ със с центъра на планетата, а положението на една от централните оси на инерция на спътника спрямо радиус-вектора отбелязваме с ъгъл Θ. Нека отбележим с P и e съответно фокалния параметър и ексцентривитета на орбитата на спътника. A, B, C са главни инерични моменти на спътника. Тогава е в сила:

Теорема 2.2. Уравнението на движението около центъра на масата на екваториален спътник на планета се дава с формулата:

$$\frac{P}{R_0(\nu)}\Theta'' - 2P\frac{R_0'(\nu)}{R_0^{\,2}(\nu)}\Theta' + \frac{(A-C)}{2Bn_0^{\,2}\left[1-\frac{B}{MR_0^{\,2}}(1+n_0\Theta')\right]^{\frac{3}{2}}}\left[3+\frac{5P^2}{2R_0^{\,2}(\nu)\left[1-\frac{B}{MR_0^{\,2}}(1+n_0\Theta')\right]}(1-n_0^{\,2})\right]\sin 2\Theta =$$

$$= \frac{2P}{n_0}\frac{R_0'(\nu)}{R_0^{\,2}(\nu)}, \tag{2.3.4}$$

където

$$R_0(\nu) = \frac{P}{1+\frac{3\alpha}{kP^2}+\frac{18\alpha^2}{P^4k^2}+e\cos\nu+\frac{\alpha e^2}{2kP^2}\cos 2\nu-\frac{3\alpha}{kP^2}\frac{e^2}{2}+\ldots}, n_0 = \sqrt{1-\frac{6\alpha}{kP^2}},$$

и диференцирането се извършва по променливата $\nu \equiv n_0\varphi$.

Ограничаваме задачата до случая, когато връзката между орбиталния и ротационния моменти може да се пренебрегне**.** Приближението, което избираме по малките параметри е до вторите степени включително. Тогава уравнението добива формата

$$n_0(1+en_0\cos\nu)\Theta'' - 2en_0^{\,2}\sin\nu\Theta' + \frac{(A-C)}{2B}\left[3+\frac{5(1-n_0^{\,2})}{2n_0^{\,2}}(1+n_0e\cos\nu)^2\right]\sin 2\Theta = 2en_0\sin\nu. \tag{2.3.5}$$

Анализирани са динамичните уравнения, посредством използването на асимптотичните методи от теорията на нелинейните динамични системи.

Резонансната динамика на екваториален спътник се изследва чрез използване метода на усредняването:

$$\frac{d^2 2\delta}{d\overline{M}^2} + 2\Omega^2 F_k(e,n_0)\sin 2\delta = 0,\ \delta = 2\Theta, \Omega^2 = \frac{3(A-C)}{2Bn_0},\ k \in Z. \tag{2.3.14}$$

Устойчивите положения на равновесие имат вида

$$F_1(e,n_0) = n_0e\left(\frac{3}{2}n_0 - 2\right) + e\frac{5(1-n_0^{\,2})}{6n_0}\left(\frac{5}{2}n_0 - 2\right) + \ldots$$

$$F_2(e,n_0) = n_0 + \frac{5(1-n_0^{\,2})}{6n_0} - \frac{5}{2}e^2 + \ldots$$

$$F_3(e,n_0) = n_0e\left(\frac{3}{2}n_0 + 2\right) + e\frac{5(1-n_0^{\,2})}{6n_0}\left(\frac{5}{2}n_0 + 2\right) + \ldots,$$

$$F_4(e,n_0) = \frac{17e^2}{2} + \ldots \tag{2.3.16}$$

Параметричен резонанс настъпва при условие:

$$\frac{1}{4}+\frac{3\alpha}{4kP^2}-\frac{3}{8}e \le \frac{3(A-C)}{B} \le \frac{1}{4}+\frac{3\alpha}{4kP^2}+\frac{3}{8}e. \qquad (2.3.21)$$

Разгледано е поведението на динамичната система в главен резонанс, като е анализирано уравнението на движение на спътника около центъра на масите му

$$\delta'' + \varpi_f{}^2\delta = \bar{e}\left(\frac{4}{n_0}\sin\nu + 2\sin\nu\delta' + \varpi_f{}^2\cos\nu\delta + a_1\delta^3\right), a_1 = \frac{\varpi_f{}^2}{6\bar{e}}, \bar{e} = n_0 e,$$

$$\varpi_f{}^2 = \frac{(A-C)}{Bn_0}\left[3+\frac{5\left(1-n_0{}^2\right)}{2n_0{}^2}\right] \approx 1. \qquad (2.3.23)$$

Уравнение изследваме посредством асимптотичния метод на Крилов-Боголюбов-Митрополски, за стойности на $\omega_f \approx 1$. Съгласно (Мойсеев 1969) търсим решението във вида

$$\delta = X\cos Y,\ \delta' = -\varpi_f X\sin Y,\ Y = \nu + Z.$$

Установяват се две стационарни точки:

$$Z_{01} = \frac{\pi}{2},\ X_{01} = 2\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3a_1 n_0}}\right),\ Z_{02} = -\frac{\pi}{2},\ X_{02} = -2\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3a_1 n_0}}\right). \qquad (2.3.38)$$

Определя се устойчивостта на стационарните точки (Меркин 1987). Пелучените резултати показват, че двете стационарни точки са център.

Основните резултати са изложени в статията (Шейретски, Гочев и Тренчев 2010).

Анализирана е устойчивостта на движението на спътника в екваториалната равнина на планета за случай на кръгова орбита.

Теорема 2.3. Ако спътник на планета се движи по кръгова орбита в поле с потенциал $U = -\frac{k}{R} - \frac{\alpha}{R^3}$, то стационарното движение е устойчиво по отношение на $R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ при условие за радиуса на орбитата $R_0 > \sqrt{\frac{3\alpha}{k}}$.

Изследвано е движението на спътник при наличие на определени динамична симетрия на формата му $A = C$. Детайлно е анализирано движението чрез използване на метода на оскулиращите елементи. Уравненията за ексцентрицитета e и прецесията ω са:

$$\frac{d\omega}{d\nu}=\frac{\dfrac{\sqrt{\mu P}}{e}\left[\dfrac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4}+\dfrac{3}{2R^4}\dfrac{(B-A)}{m}+\dfrac{15}{2}\dfrac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\dfrac{(B-A)}{m}\right]\cos\nu}{\dfrac{\sqrt{\mu P}}{R^2}-\dfrac{\sqrt{\mu P}}{e}\left[\dfrac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4}+\dfrac{3}{2R^4}\dfrac{(B-A)}{m}+\dfrac{15}{2}\dfrac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\dfrac{(B-A)}{m}\right]\cos\nu}, \tag{2.5.12}$$

$$\frac{de}{d\nu}=-\frac{\sqrt{\mu P}\left[\dfrac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4}+\dfrac{3}{2R^4}\dfrac{(B-A)}{m}+\dfrac{15}{2}\dfrac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\dfrac{(B-A)}{m}\right]\sin\nu}{\dfrac{\sqrt{\mu P}}{R^2}-\dfrac{\sqrt{\mu P}}{e}\left[\dfrac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4}+\dfrac{3}{2R^4}\dfrac{(B-A)}{m}+\dfrac{15}{2}\dfrac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\dfrac{(B-A)}{m}\right]\cos\nu}. \tag{2.5.13}$$

Решението в приетото от нас приближение се дава с изразите

$$\omega=3\varepsilon_0\left(\nu+\left(\frac{1}{e_0}+\frac{3e_0}{2}\right)\sin\nu+\frac{\sin 2\nu}{2}+\frac{e_0\sin 3\nu}{6}\right), \tag{2.5.16}$$

$$e\approx e_0-6\varepsilon_0\sin^2\frac{\nu}{2}, \tag{2.5.17}$$

където

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{3P^2}+\frac{(B-A)}{2mP^2}.$$

Изследвано е влиянието на приливните сили при движението на екваториален спътник на планета, като твърдо тяло. Изведено е динамичното уравнение в специални функции:

$$\left[1+e\left(cn^2\tilde{x}-sn^2\tilde{x}\right)\right]\frac{d^2\delta}{d\varphi^2}-2e4acn\,\tilde{x}\;dn\,\tilde{x}\;sn\,\tilde{x}\;dn\,\tilde{x}\frac{d\delta}{d\varphi}+\beta\left[1+e\left(cn^2\tilde{x}-sn^2\tilde{x}\right)\right]^5\frac{d\delta}{d\varphi}+\tilde{\omega}_f^{\,2}\sin\delta=$$
$$=4e4cn\,\tilde{x}\;dn\,\tilde{x}\;sn\,\tilde{x}\;a,$$
$$\beta=\frac{\tilde{\delta}}{BP^5}\sqrt{\mu P},\ \tilde{\delta}=const.,\ R=\frac{P}{1+e\left[cn^2\tilde{x}-sn^2\tilde{x}\right]},\ \tilde{x}=a\varphi,$$
$$\tilde{\omega}_f^{\,2}=3\frac{A-C}{B}\left\{1+\frac{5}{3}\varepsilon\frac{R_e^{\,2}}{P^2}\left[1+e\left(cn^2\tilde{x}-sn^2\tilde{x}\right)\right]^2\right\},\ a=\sqrt{(u_1-u_3)\frac{\varepsilon\mu R_e}{6G^3}} \tag{2.6.3}$$

Изследвано е уравнението в приближение:

$$\delta''+\varpi_f^{\,2}\delta=\bar{e}\left(\frac{4}{n_0}\sin\nu+\left(2\sin\nu-\tilde{\beta}_1\right)\delta'+\varpi_f^{\,2}\cos\nu\delta+a_1\delta^3\right),\ \tilde{\beta}_1=\frac{\tilde{\beta}}{n_0\bar{e}}. \tag{2.6.18}$$

Търси се решение за движение в главен резонанс $\omega_f\approx 1$ във вида:

$\delta=X\cos Y$, $\delta'=-\varpi_f X\sin Y$, $Y=\nu+Z$

За стационарните точки се получават решенията

$$Z_{01} = \frac{\pi}{2} + \frac{\tilde{\beta}_1 \varpi_f}{2} \sqrt[3]{\frac{2n_0^2}{3a_1}}, \; X_{01} = 2\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3a_1 n_0}}\right);$$

$$Z_{02} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\tilde{\beta}_1 \varpi_f}{2} \sqrt[3]{\frac{2n_0^2}{3a_1}}, \; X_{02} = -2\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3a_1 n_0}}\right). \qquad (2.6.23)$$

Изследването на точките за линейна устойчивост показва, че двете точки са устойчиви възли.

В **Глава 3.** се разглеждат резонансните и хаотичните движения на спътниците като посредством канонични преобразувания се извежда резонансния хамилтониан.

Най-общия вид на хамилтониана е от вида:

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2} - \omega_0^2 \cos\bar{q} - \tilde{\varepsilon}F_1 \cos(k_1\bar{q} - \Omega_1 t) + \tilde{\varepsilon}F_2 \cos(k_2\bar{q} - \Omega_2 t), \qquad (3.1.7)$$

където ω_0, k_1, k_2, Ω_1, Ω_2, F_1 и F_2 са реални параметри, $\tilde{\varepsilon}$ е малък параметър.

Посредством канонични преобразувания се стига до теоремата:

Теорема 3.1. Ако е даден хамилтониана (3.1.7) то тогава резонансния хамилтониан в променливи действие-ъгъл се дава с израза:

$$-\left\{\frac{n^2}{16} + \frac{\tilde{\varepsilon}F_1}{2}\left[J_n''\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1^2 n}{2\omega_0 I_0} - J_n'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1}{I_0^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{n}{8\omega_0}}\right]\cos\Psi_0\right\}\eta^2 +$$
$$+\frac{\tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\psi_0}{2}\xi^2 = H_r - H_{r0}, \qquad (3.1.40)$$

където ξ и η са малки отклонения съответно от резонансното действие и ъгъл, J_n са беселови функции от първи род, а с прим и секон сме отбелязали първата и втората им производна по аргумента,

$$\Delta I_0 - \frac{n^2 I_0^2}{16} - \tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\Psi_0 = H_{r0}.$$

Очевидно е, че резонансния хамилтониан не зависи от втория смущаващ член в (3.1.17). Определени са условията за устойчивост на резонансните действия-ъгли.

Хамилтониана на екваториален спътник има вида

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2} - \omega_0^2 \cos\bar{q} + \frac{\omega_0^2 e}{2}\cos(\bar{q} + t) - \frac{7\omega_0^2 e}{2}\cos(\bar{q} - t), \qquad (3.1.6)$$

$\bar{p}$ и $\bar{q}$ са съответно каноничен импулс и канонична координата.

Изведен е резонансния хамилтониан на спътник за случая на главен резонанс, посредством който са изследвани случаите на устойчиво или неустойчиво движение във вторични резонанси. Разгледан е случай на вторичен спин-орбитален резонанс при движението на екваториален спътник, от типа ½ на главния резонанс. Хамилтониана на системата в променливи действие-ъгъл (I ,Ψ) има вида:

$$H_r = (2\omega_0 - 1)I - \frac{I^2}{4} - \frac{7\omega_0^{\ 2} e}{2}\left(\frac{I}{2\omega_0} - \frac{I^2}{\omega_0^{\ 2} 6}\right)\cos\Psi \ . \tag{3.1.53}$$

В резултат се достига до изразите за стационарните точки

$$\Psi_0 = 0 \ (\mathrm{mod}\, 2\pi), I = I_0^0 = \frac{(2\omega_0 - 1) - \frac{7}{4}\omega_0 \, e}{\frac{1}{2} - \frac{7}{6}e} \tag{3.1.55}$$

$$\Psi_0 = \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi), I = I_0^\pi = \frac{(2\omega_0 - 1) + \frac{7}{4}\omega_0 \, e}{\frac{1}{2} + \frac{7}{6}e} \ . \tag{3.1.56}$$

Стационарната точка (3.1.55) е неустойчива, а точка (3.1.56) е устойчива при условието:

$$\frac{1}{2 + \frac{7}{4}e} < \omega_0 < \frac{1}{2 - \frac{7}{4}e} \ . \tag{3.1.58}$$

Анализирана е динамиката на спътник при движение в околност на сепаратрисите на резонансите. Изследвани са особеностите на кривите във фазовото пространство при такъв режим като е направена количествена оценка на хаотичната зона. Приложени са получените резултати за вторичен резонанс от типа 1/2 на главен резонанс като е оценена ширината на хаотичната зона във фазовото пространство.

$$\frac{\delta E}{E} \le \frac{8\pi}{7}\left(\frac{2}{\Xi}\right)^3 \exp\left(-\frac{3\pi}{\Xi}\right), \tag{3.2.57}$$

където $\Xi = \dfrac{e\omega I_0}{4}$.

Резултатите са отразени в публикацията (Шейретски, Тренчев и Луков 2008**).**

Разгледана е хаотичната динамика на спътник движещ се по кръгова орбита в гравитационно поле подложен на действието на магнитен и приливен момент. Чрез интеграл на Мелников-Арнолд е дадена оценка на ширината на хаотичната зона при несферична форма на спътника и сферична форма на спътника под влияние и в отсъствие на приливен момент.

Теорема 3.2. Ако спътник с маса m и главни моменти на инерция A, B, C, се движи по кръгова орбита с радиус R_0 в гравитационно поле на планета с маса M, подложен на действието на постоянен магнитен момент I и приливен момент, то тогава настъпва преход от регулярно към хаотично движение на спътника при следните условия:

1/ при елиптична форма на спътника и

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} < \frac{\pi}{2n}\left(\frac{1}{sh\frac{\pi}{2\omega_0}} + \frac{2}{ch\frac{\pi}{2\omega_0}}\right),$$

където $\omega_0{}^2 = \frac{3(A-C)}{2B}$, $\overline{\alpha} = \frac{I\mu_c}{B\gamma m(M+m)}$, μ_c е модул на постоянният магнитен момент на централното тяло, γ - универсална гравитационна константа, $\beta = \frac{\tilde{\delta}}{BR_0{}^5}\sqrt{\mu R_0}$,

$\tilde{\delta} = const.$, $\beta_1 = \frac{\beta}{\omega_0{}^2}$, $\alpha_1 = \frac{\overline{\alpha}}{\omega_0{}^2}$;

2/ при сферична форма на спътника и

$$\beta_2 < \frac{8\pi}{3\omega_0{}^2(8+2\pi)}\left(\frac{1}{sh\frac{\pi}{\varpi}} - \frac{1}{ch\frac{\pi}{\varpi}}\right),$$

където $\beta_2 = \frac{\beta}{\varpi^2}$ и $\varpi^2 = \frac{3\overline{\alpha}}{2}$.

Хамилтониана на динамичната система описваща движението на сферичен спътник под действието на магнитен момент (в отсъствие на приливен момент), се дава с израза

$$H = \frac{\left(\frac{dx}{du}\right)^2}{2} - \varpi^2\cos x + \frac{\varpi^2}{3}\cos(x+2u), \quad x = \frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{2} - u. \tag{3.3.13}$$

Твърдение 3.1. Ширината на стохастичната зона в околност на сепаратрисите на сферичен спътник подложен на действието на магнитен момент се дава с израза

$$\frac{\Delta E}{E} \le \frac{16\pi}{3\varpi} \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{\varpi}\right)}{sh\frac{\pi\varpi}{2}}. \tag{3.3.22}$$

Резултатите са публикувани в (Шейретски, Тренчев и Киров 2007). Процедурата за описване на условията за преход от регулярно към хаотично поведение на системата е представена в статията (Дамгов, Тренчев, Шейретски 2003).

В **Глава 4.** е изследвана връзката между орбиталното движение и движението около собствения му център на масата на екваториален спътник на планета. Показана е връзката между модела на анхармоничния осцилатор и движението на спътник в нютоново централно поле. Изведената формула посредством канонични преобразувания отразява количествено параметрите на движението.

Разгледан е случая на движение на екваториален спътник на планета по кръгова орбита, като е отчетена връзката между уравненията описващи движението на центъра на масата на спътника по траекторията и въртеливите (колебателните) движения на спътника – съгласно уравненията на Ойлер. Описани са нелинейните ефекти произтичащи от разглеждането на неограничената задача (Шейретски и Ерохин 2009).

Теорема 4.1. Ако спътник с маса m и главни моменти на инерция A, B, C, се движи по кръгова орбита с радиус R_0 в гравитационно поле на сферична планета с маса M, спрямо координатна система с център- центъра на планетата и поляpен ъгъл φ, тогава:

1/ при колебателно движение на спътника около центъра на масата му,
периодът на колебанията се определя от израза

$$T_l = \frac{2\pi}{\sqrt{3\frac{\mu}{R_0^{\ 3}}\frac{A-C}{B}}}\sqrt{\frac{mR_0^{\ 2}+B}{MR_0^{\ 2}}}.$$

Максималното изменение, което може да претърпи $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ е

$$|\Delta\dot{\varphi}|_{\max} = 2\sqrt{3\frac{\gamma(M+m)B(A-C)}{R_0^5\left(mR_0^{\ 2}+B\right)}};$$

2/ периодът на въртенето около центъра на масата са дава с израза

$$T_R = \frac{4\tilde{K}\left(\overline{K}^2\right)\overline{K}}{\Omega},\ \Omega^2 = 3\frac{\mu}{R_0^{\ 3}}\frac{A-C}{B}\left(\frac{mR_0^{\ 2}+B}{mR_0^{\ 2}}\right).$$

При въртенето в директна и индиректна посока $\dot{\varphi}$ има различни стойности, съответно:

$$\dot{\varphi}_{+} = \frac{G}{mR_0^{\ 2} + B} - \frac{B}{mR_0^{\ 2} + B}\sqrt{2h_0} + O\left(\frac{\Omega^2}{2\sqrt{2h_0}}\right),$$

$$\dot{\varphi}_{-} = \frac{G}{mR_0^{\ 2} + B} + \frac{B}{mR_0^{\ 2} + B}\sqrt{2h_0} + O\left(\frac{\Omega^2}{2\sqrt{2h_0}}\right),$$

където $h_0 = const.$ е енергията на движението на спътника относно центъра на масата му.

3/ енергията на орбиталното движение на спътника се дава с израза

$$\frac{G^2}{2\left(MR_0^{\ 2} + B\right)} - \frac{\mu m}{R_0} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{R_0^{\ 3}}\left(B + A - 2C\right) + \frac{mR_0^{\ 2}B}{mR_0^{\ 2} + B}h_0 = E\,,$$

където $G = const.$ е интеграл на общия импулс на системата.

Разгледано е движението на екваториален спътник в спин-орбитален резонанс 3:2 като е решена пълната система от динамични уравнения:

$$\sigma - \varepsilon\sigma^3 = \frac{\tilde{\Omega}^2}{2n^2}\cos\varphi + C \qquad (4.4.5)$$

$$\sigma'' + \sigma - 1 - 5\varepsilon\sigma^3 + \frac{3}{2}\bar{\delta}_1\varepsilon\sigma^2 - 2\varepsilon\left(\sigma\sigma'^2 + \sigma^2\sigma''\right) = 0\,, \qquad (4.4.8)$$

където $\varepsilon = \dfrac{3B}{2mP^2}, \sigma = \dfrac{P}{R},\ \tilde{\Omega}^2 = \dfrac{\mu}{P^3}\dfrac{A - C}{B},\ \bar{\delta}_1 = \dfrac{A + B + C}{3B} + 1.$

Твърдение 4.1. При движение на спътник извършващ един оборот около оста си за време равно на две завъртания около планетата са в сила следните твърдения:

1. Условието, на което трябва да отговаря формата на тялото при движение в разгледания тип резонанс е

$$A + C - 26B = 0\,; \qquad (4.4.19)$$

2. Когато не се отчита връзката между орбиталния и въртеливия момент на тялото съществува връзката:

$$\frac{A - C}{B} = 2e\,, \qquad (4.4.20)$$

като отклоненията от това равенство, при неограничената задача, се компенсират от изменението на ексцентрицитета на орбитата или амплитудата на колебанието:

$$\varepsilon A = \frac{\Omega^2}{2n^2} - e + 3\varepsilon e + O(\varepsilon e^3)\,; \qquad (4.4.21)$$

3. Движението се извършва с прецесия

$$\Delta\omega = -\frac{27\pi B}{mP^2} + \frac{27\pi B e^2}{8mP^2}, \tag{4.4.22}$$

която слабо зависи от квадрата на ексцентрицитета;

4. Границите на приложимост на метода са:

$$\frac{9}{32}e^3 \le \varepsilon \le e^2. \tag{4.4.23}$$

Може да се намери такава траектория на спътника, при която да няма прецесия. Тогава параметърът $\delta = 4$. Условието, което трябва да е изпълнено за да се осъществи такова движение е:

$$\frac{3}{2}e^2 < \varepsilon < e. \tag{4.4.24}$$

Наличието на условие $A = C$ води до движение по кръгова орбита. Енергията като функция на радиуса на орбитата R_0 има вида:

$$E = -\frac{\mu m}{2R_0}\left[1 + \frac{3}{8mR_0^{\ 2}}(3B + 4C)\right]. \tag{4.4.25}$$

Резултатите са изложени в статията (Шейретски, Шкевов и Ерохин 2012).

Апробация на резултатите

Основните резултати от задачите залегнали в дисертацията са представени като доклади и статии в авторитетни български и международни конференции и списания. Голяма част от представените в дисертацията аналитични изследвания са докладвани на конференциите с международно участие, провеждащи се от няколко години насам, както и семинари организирани от Институт за космически изследвания и технологии на Българска академия на науките. Точно решение на неограничената задача за движението на екваториален спътник на планета по кръгова орбите е докладвано на международната конференция MCC-09 "Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность" 23-29 ноември 2009 проведена в Москва. Публикувана е статия в списание „Доклади на БАН" разглеждаща резонансното движение на екваториален спътник. Процедурата за намиране на условията за преход от регулярно към хаотично поведение на системи от типа на разгледаните в дисертацията е изложена в списание "Chaos, solitons and fractals".

Приноси на дисертацията

Приносите на дисертацията могат да се обобщят посредством четери теореми.

Нека спътник с маса m се движи в екваториалната равнина на планета с маса M. Определяме положението на центъра на масата на спътника O' посредством полярни координати R,φ, с център на к.с. O съвпадащ със с центъра на планетата, а положението на една от централните оси на инерция на спътника спрямо радиус-вектора отбелязваме с ъгъл Θ. Нека отбележим с P и e съответно фокалния параметър и ексцентривитета на орбитата на спътника. Дефинираме $\alpha = \varepsilon \dfrac{MR_e{}^2 \mu}{3}$, R_e е екваториалният радиус на планетата, $\varepsilon = \dfrac{R_e - R_p}{R_e} - \dfrac{\omega_p{}^2 R_e}{g_e}$, R_p - поляред радиус на планетата, ω_p - ъглова скорост на въртене на планетата, g_e - планетно ускорение на екватора, A, B, C са главни инеричли моменти на спътника, $\mu = \gamma(m+M)$, γ е универсална гравитационна константа. Тогава е в сила:

Теорема 2.2. Уравнението на движението около центъра на масата на екваториален спътник на планета се дава с формулата:

$$\frac{P}{R_0(\nu)}\Theta'' - 2P\frac{R_0'(\nu)}{R_0{}^2(\nu)}\Theta' + \frac{(A-C)}{2Bn_0{}^2\left[1 - \dfrac{B}{MR_0{}^2}(1+n_0\Theta')\right]^{\frac{3}{2}}}\left[3 + \frac{5P^2}{2R_0{}^2(\nu)\left[1 - \dfrac{B}{MR_0{}^2}(1+n_0\Theta')\right]}\left(1-n_0{}^2\right)\right]\sin 2\Theta =$$
$$= \frac{2P}{n_0}\frac{R_0'(\nu)}{R_0{}^2(\nu)},$$

където

$$R_0(\nu) = \frac{P}{1 + \dfrac{3\alpha}{kP^2} + \dfrac{18\alpha^2}{P^4k^2} + e\cos\nu + \dfrac{\alpha e^2}{2kP^2}\cos 2\nu - \dfrac{3\alpha}{kP^2}\dfrac{e^2}{2} + \ldots}, n_0 = \sqrt{1 - \frac{6\alpha}{kP^2}},$$

и диференцирането се извършва по променливата $\nu \equiv n_0\varphi$.

Теорема 3.1. Ако е даден хамилтониана

$$H = \frac{\overline{p}^2}{2} - \omega_0{}^2\cos\overline{q} - \tilde{\varepsilon}F_1\cos(k_1\overline{q} - \Omega_1 t) + \tilde{\varepsilon}F_2\cos(k_2\overline{q} - \Omega_2 t),$$

където ω_0, k_1, k_2, Ω_1, Ω_2, F_1 и F_2 са реални параметри, $\tilde{\varepsilon}$ е малък параметър, то тогава резонансния хамилтониан в променливи действие - ъгъл се дава с израза:

$$-\left\{\frac{n^2}{16}+\frac{\tilde{\varepsilon}F_1}{2}\left[J_n''\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1^{\ 2}n}{2\omega_0 I_0}-J_n'\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\frac{k_1}{I_0^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{n}{8\omega_0}}\right]\cos\Psi_0\right\}\eta^2+$$

$$+\frac{\tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\psi_0}{2}\xi^2=H_r-H_{r0}, \tag{3.1.40}$$

където ξ и η са малки отклонения съответно от резонансното действие и ъгъл,

$$\Delta I_0-\frac{n^2 I_0^{\ 2}}{16}-\tilde{\varepsilon}F_1 J_n\left(k_1\sqrt{\frac{2nI_0}{\omega_0}}\right)\cos\Psi_0=H_{r0}.$$

Теорема 3.2. Ако спътник с маса m и главни моменти на инерция A,B,C, се движи по кръгова орбита с радиус R_0 в гравитационно поле на планета с маса M, подложен на действието на постоянен магнитен момент I и приливен момент, то тогава настъпва преход от регулярно към хаотично движение на спътника при следните условия:

1/ при елиптична форма на спътника и

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}<\frac{\pi}{2n}\left(\frac{1}{sh\frac{\pi}{2\omega_0}}+\frac{2}{ch\frac{\pi}{2\omega_0}}\right),$$

където $\omega_0^{\ 2}=\frac{3(A-C)}{2B}$, $\overline{\alpha}=\frac{I\mu_c}{B\gamma m(M+m)}$, μ_c е модул на постоянният магнитен момент на централното тяло, γ - универсална гравитационна константа, $\beta=\frac{\tilde{\delta}}{BR_0^{\ 5}}\sqrt{\mu R_0}$, $\tilde{\delta}=const.$, $\beta_1=\frac{\beta}{\omega_0^{\ 2}}$, $\alpha_1=\frac{\overline{\alpha}}{\omega_0^{\ 2}}$;

2/ при сферична форма на спътника и

$$\beta_2<\frac{8\pi}{3\omega_0^{\ 2}(8+2\pi)}\left(\frac{1}{sh\frac{\pi}{\varpi}}-\frac{1}{ch\frac{\pi}{\varpi}}\right),$$

където $\beta_2=\frac{\beta}{\varpi^2}$ и $\varpi^2=\frac{3\overline{\alpha}}{2}$.

Теорема 4.1. Ако спътник с маса m и главни моменти на инерция A,B,C, се движи по кръгова орбита с радиус R_0 в гравитационно поле на сферична планета с маса

M , спрямо координатна система с център- центъра на планетата и поларен ъгъл φ, тогава:

1/ при колебателно движение на спътника около центъра на масата му, периодът на колебанията се определя от израза

$$T_l = \frac{2\pi}{\sqrt{3\frac{\mu}{R_0^{\ 3}}\frac{A-C}{B}}}\sqrt{\frac{mR_0^{\ 2}+B}{MR_0^{\ 2}}} \, .$$

Максималното изменение, което може да претърпи $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$, е

$$\left|\Delta\dot{\varphi}\right|_{\max} = 2\sqrt{3\frac{\gamma(M+m)B(A-C)}{R_0^5\left(mR_0^{\ 2}+B\right)}} \, ;$$

2/ периодът на въртенето около центъра на масата са дава с израза

$$T_R = \frac{4\tilde{K}\left(\overline{K}^2\right)\overline{K}}{\Omega} \, , \ \Omega^2 = 3\frac{\mu}{R_0^{\ 3}}\frac{A-C}{B}\left(\frac{mR_0^{\ 2}+B}{mR_0^{\ 2}}\right).$$

При въртенето в директна и индиректна посока $\dot{\varphi}$ има различни стойности, съответно:

$$\dot{\varphi}_+ = \frac{G}{mR_0^{\ 2}+B} - \frac{B}{mR_0^{\ 2}+B}\sqrt{2h_0} + O\left(\frac{\Omega^2}{2\sqrt{2h_0}}\right),$$

$$\dot{\varphi}_- = \frac{G}{mR_0^{\ 2}+B} + \frac{B}{mR_0^{\ 2}+B}\sqrt{2h_0} + O\left(\frac{\Omega^2}{2\sqrt{2h_0}}\right),$$

където $h_0 = const.$ е енергията на движението на спътника относно центъра на масата му.

3/ енергията на орбиталното движение на спътника се дава с израза

$$\frac{G^2}{2\left(MR_0^{\ 2}+B\right)} - \frac{\mu m}{R_0} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{R_0^{\ 3}}(B+A-2C) + \frac{mR_0^{\ 2}B}{mR_0^{\ 2}+B}h_0 = E \, ,$$

където $G = const.$ е интеграл на общия импулс на системата.

Заключение

Изследваните уравнения в дисертацията имат тясна връзка с движенията на изкуствените спътници. Получените уравнения в работата са свързани с параметрите на сравнително често използвани орбити, а отчитаните в уравненията смущения са достатъчни за решаването на практически задачи свързани с управлението и стабилизацията на такива спътници. Голяма част и от естествените спътници на планетите се движат по орбити с малък наклон, а включването в уравнението за движение на приливните сили дава възможност за цялостен анализ на движението на подобни небесни тела.

Изследването на резонансни динамични системи има и практическо значение за подбиране на устойчиви резонансни траектории на изкуствени спътници.

Направеният анализ на спътниково движение в гравитационно и магнитно поле ясно показва, че хаотичното движение е характерно и за динамични системи, разглеждани като сравнително прости кръгови орбити, наличие на симетрии и т.н.. Познаването на границите в пространството на параметрите, за които можем да твърдим, че дадено движение остава регулярно е от огромно значение за движението на изкуствените спътници.

Разгледана е връзката между орбиталното движение и движението около собствения център на масата на екваториален спътник на планета. Отчитането на формата на спътника води до нарушаване изотропността на пространствените движения, т.е. движението в дадена посока не е равноправно на движението в друга. Налага се изводът, че установяването на нови нелинейни ефекти на движението при разглеждането на неограничената задача е вероятно правило, а не изключение, така че могат да се поставят бъдещи задачи с практическо значение-стабилизиране движението на спътниците с използването на подобни явления, обяснение на определен тип движения наблюдавани при движенията на изкуствените спътници с неизяснен характер и други.

Публикации на автора свързани с дисертацията

В международни списания с импакт фактор:

1. Damgov, V., P. Trenchev, K. Sheiretsky, *“Oscilator-wave” model: properties and heurastic instances.* Chaos, Solitons and Fractals. Oxford: Pergamon press, 2003, pp. 41-60

В български списания с импакт фактор:

1. Sheiretsky, K., R. Shkevov, N. Erokhin, *Satellite dynamics rotating ones around its own axis within two revolutions around the planet*, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Tome 65, No 5, 2012, Sofia, pp. 505-513.

Пълен текст в сборници от конференции:

– **Извън България:**

1. Шейретски К., Н. Ерохин. *Взаимосвязь между поступательным и вращательным движениями спутника по круговой орбите в центральном гравитационном поле*, MSS-09**.** Москва, 2009, с. 276-282 .

– **Международни в България:**

1. Шейретски, К. *Плоски колебания на екваториален спътник под приливно въздействие,* SES’2005, Варна, 2005, с.. 70-75.
2. Шейретски, К., Д. Гочев, П. Тренчев, *Нелинейни явления при колебанието на екваториален спътник*, SES 2010, 2011, с. 97-100.
3. Шейретски, К., П. Тренчев, Г. Киров, *Хаотична динамика на спътник, движещ се по кръгова орбита в гравитационно поле, подложен на действието на магнитен и приливен момент*, SENS’2007, Варна, 2007, с.76-80 .
4. Шейретски, К., П. Тренчев, С. Луков, *Аналитично изследване на спътник в синхронен резонанс. Изследване на вторични съотношения 1:n.* SENS’2008, Златни пясъци, 2008, с. 22-28.
5. Шейретски К., М. Лазарова, Р. Шкевов, Н. Ерохин, *Движение на спътник в екваториалната равнина на планета*, SES 2011. Под печат.

Използвана литература

Белецки 1965: Белецкий, В. В., *Движение искусственого спутника относительно центра масс*. Наука. Москва,1965.

Белецки 1975: Белецкий, В. В., *Очерки о движении космических тел*. Наука. Москва,1975.

Белецки и Понамарьова 1990: Белецкий, В., Пономарева, О., *Параметрический анализ устойчивости относителного равновесия в гравитационном поле.* Космические исследования, том 28, в. 5, 1990.

Белецки и Хентов 1995: Белецкий, В.В., Хентов, А. А., *Резонансные вращения небесных тел*, Нижегородский хуманитарны центр, 1995.

Дубошин 1952: Дубошин, Г. Н., *Небесная механика (основные задачи и методы)*, Московский университет. Москва, 1952.

Дамгов, Тренчев, Шейретски 2003: Damgov, V., Trenchev, P., Sheiretsky, K. *"Oscilator-wave" model: properties and heurastic instances.* Chaos, Solitons and Fractals. Oxford: Pergamon press, 2003, pp. 41-60

Меркин 1987: Меркин Д. Р. *Введение в теорию устойчивости движения*. Москжа. Наука. 1987.

Мойсеев 1969: Моисеев Н. *Асимптотические методы нелинейной механики*. М.: Наука. 1969.

Мъри и Дермът 2009: Мюррей, К., Дермотт, С., *Динамика Солничной системы.* Физматлит. Москва, 2009.

Поанкаре 1965: Пуанкаре А. *Лекции по небесной механике*. Наука. Москва, 1965.

Поанкаре 1892: Poincare H., *Les methodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1—3. P., 1892—97

Саричев, Сазонов и Златоустов 1979: Сарычев В. А., Сазонов В. В, Златоустов В. А., *Периодические вращения спутника в плоскости эллиптической орбите*. Космические исследования, 1979, т. 17, вып. 2, с. 190-207.

Уиздъм 1987a: Wisdom, J. (1987a). *Urey Prize Lecture: Chaotic dynamics in the solar system*, Icarus **72**, 241–275.

Уиздъм 1987b: Wisdom, J. (1987b). *Chaotic behaviour in the solar system*, Proc. R. Soc. Lond. A **413**, 109–129.

Уиздъм, Пил и Миняр 1984: Wisdom, J., Peale, S.J. and Mignard, F. (1984). *The chaotic rotation of Hyperion*, Icarus 58, 137–152.

Целети и Черчия 2000: Celletti A., L. Chierchia. *Hamiltonian Stability of Spin–Orbit Resonances in Celestial Mechanics.* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy . 2000. Volume 76, Number 4, 229-240.

Шейретски и Ерохин 2009: Шейретски К., Н. Ерохин. *Взаимосвязь между поступательным и вращательным движениями спутника по круговой орбите в центральном гравитационном поле* MSS-09**.** Москва, 2009, pp. 276-282.

Шейретски 2005: Шейретски, К. *Плоски колебания на екваториален спътник под приливно въздействие.* SES'2005, Варна, 2005, с.70-75.

Шейретски, Гочев и Тренчев 2010: Шейретски, К., Гочев, Д., Тренчев, П. *Нелинейни явления при колебанието на екваториален спътник.* SES 2010 , София, 2011, с. 97-100.

Шейретски, Лазарова, Шкевов и Ерохин 2011: Шейретски К., Лазарова М., Шкевов Р. Ерохин Н. *Движение на спътник в екваториалната равнина на планета.* SES 2011. под печат.

Шейретски, Тренчев и Киров 2007: Шейретски, К., Тренчев, П., Киров, Г. *Хаотична динамика на спътник, движещ се по кръгова орбита в гравитационно поле, подложен на действието на магнитен и приливен момент.* SENS'2007, Варна, 2007, с. 76-80.

Шейретски, Тренчев и Луков 2008: Шейретски, К., Тренчев, П., Луков, С. *Аналитично изследване на спътник в синхронен резонанс. Изследване на вторични съотношения 1:n.* SENS'2008, Златни пясъци, 2008, с. 22-28.

Шейретски, Шкевов и Ерохин 2012: Sheiretsky, K., Shkevov,R., Erokhin, N. *Satellite dynamics rotating ones around its own axis within two revolutions around the planet.* Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences. Tome 65, No 5, 2012, Sofia, pp. 505-513.